

Stabilité de la propriété de Koszul pour les algèbres homogènes vis-à-vis du produit semi-croisé

Antonin POTTIER

École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05 et
Laboratoire de Physique Théorique, UMR 8627, Université Paris XI,
Bâtiment 210, F-91 405 Orsay Cedex, France, antonin.pottier@ens.fr

Résumé

We study the stability of Koszul and Gorenstein properties for the semi-cross product of homogeneous algebras.

Nous étudions la conservation des propriétés de Koszul et de Gorenstein pour le produit semi-croisé des algèbres homogènes.

1 Introduction

Le but de cette note est d'étudier la stabilité de certaines propriétés homologiques des algèbres homogènes par produit semi-croisé, introduit au paragraphe 7.1 de [1]. Plus précisément, nous montrons qu'une algèbre homogène est de type Koszul si et seulement si un de ces produits semi-croisés l'est. Dans le cas où la dimension globale est finie, être de type Gorenstein est équivalent pour l'algèbre et ses produits semi-croisés.

Différentes notions relatives aux algèbres quadratiques introduites par [2] sont généralisées aux algèbres homogènes dans [3]. En particulier un N -complexe est canoniquement attaché à toute algèbre N -homogène, dont le complexe de Koszul de [4] est une contraction. Dans l'article [4], il est montré qu'être de type Koszul pour une algèbre homogène est équivalent à l'acyclicité de ce complexe. C'est cette caractérisation que nous utiliserons. En plus d'algèbres quadratiques, on trouve des algèbres cubiques dans la classification des algèbres régulières de dimension 3 décrite par [5]. D'autres exemples d'algèbres homogènes de degré supérieur à 3 ont été étudiées par la suite dans [4], ainsi que dans [6] et [7] en liaison avec certaines équations issues de la physique théorique.

2 Rappels et notations

k est un corps fixé dans toute la suite, tous les produits tensoriels seront pris sur k , $\otimes = \otimes_k$. Soit $\mathcal{A} = A(E, R)$ une algèbre homogène de degré N . C'est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(E)$ associée à un k -espace vectoriel E de dimension finie par un idéal bilatère $I(R)$ engendré par un espace de relations $R \subset E^{\otimes N}$. Soit α un automorphisme de l'algèbre graduée \mathcal{A} . Il est défini par un automorphisme de E étendu canoniquement à $T(E)$, encore noté α et tel que $\alpha(R) = R$. L'algèbre \mathcal{A}^α , produit semi-croisé de \mathcal{A} par α , est donnée par l'espace vectoriel gradué sous-jacent à \mathcal{A} muni du produit \cdot défini sur les éléments homogènes par $x \cdot y = x\alpha^{|x|}(y)$ où $|x|$ est le degré de x et où le symbole pour le produit dans \mathcal{A} est omis, voir [1]. \mathcal{A}^α est encore une algèbre associative avec unité, identique à celle de \mathcal{A} . Remarquons tout de suite que $id : \mathcal{A}^\alpha \rightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme de k -espaces vectoriels et que α est encore un automorphisme de l'algèbre \mathcal{A}^α , ainsi que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\alpha)^{\alpha^{-1}}$.

Définissons maintenant θ , automorphisme de l'espace vectoriel gradué $T(E)$: en degré $n+1$, $\theta_{n+1}(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_0 \otimes \alpha(x_1) \otimes \dots \otimes \alpha^n(x_n)$. Relativement à la décomposition $E^{\otimes n+1} \simeq E^{\otimes p+1} \otimes E^{\otimes n-p}$, on a la formule :

$$\theta_{n+1} = (\theta_{p+1} \otimes id) \circ (id \otimes (\alpha^{p+1} \circ \theta_{n-p})) \quad (1)$$

Comme application de ces définitions, prouvons la proposition suivante.

Proposition 1 \mathcal{A}^α est une algèbre homogène de degré N , $\mathcal{A}^\alpha = A(E, \theta_N^{-1}(R))$.

Considérons $m : T(E) \rightarrow \mathcal{A}$ défini en degré n par $m(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ et $m_\alpha : T(E) \rightarrow \mathcal{A}^\alpha$ défini en degré n par $m_\alpha(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Alors le diagramme suivant d'applications linéaires commute, c'est-à-dire $m_\alpha = m \circ \theta$.

$$\begin{array}{ccc} T(E) & \xrightarrow{m_\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \\ \downarrow \theta & & \downarrow id \\ T(E) & \xrightarrow{m} & \mathcal{A} \end{array}$$

Par définition [3], $\text{Ker } m = I(R)$, d'où l'égalité $\text{Ker } m_\alpha = \theta^{-1}(I(R)) = I(\theta_N^{-1}(R))$. En conséquence \mathcal{A}^α est une algèbre homogène de degré N , $\mathcal{A}^\alpha = A(E, \theta_N^{-1}(R))$.

Exemple Soient $\mathcal{A} = A(E = kx \oplus ky, x \otimes y \otimes x - y \otimes x \otimes y)$ l'algèbre des tresses à 3 brins et α l'automorphisme involutif échangeant x et y . Alors le produit semi-croisé de \mathcal{A} par α est $\mathcal{A}^\alpha = A(E, x \otimes x \otimes x - y \otimes y \otimes y)$, ce qui est une écriture plus symétrique. Nous poursuivrons plus loin l'étude de cette algèbre via son produit semi-croisé.

3 Conservation des types Koszul et Gorenstein

Théorème 2 \mathcal{A} est de type Koszul si et seulement si \mathcal{A}^α est de type Koszul.

D'après [3], \mathcal{A} est de type Koszul si le complexe \mathcal{C} de \mathcal{A} -modules à gauche est acyclique en degrés strictement positifs. Le complexe \mathcal{C} , c'est-à-dire $\dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{(p+1)N}^{!*} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{pN+1}^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{pN}^{!*} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \longrightarrow 0$, est la contraction $\mathcal{C} = C_{N-1,0}$ du N -complexe $K(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} -modules à gauche (avec $\delta = d^{N-1}$) $\dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i+1}^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*} \xrightarrow{d} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A} \longrightarrow 0$.

Nous pouvons voir $(K(\mathcal{A}), d)$ comme un N -complexe d'espaces vectoriels. Nous allons construire un isomorphisme de N -complexes entre $(K(\mathcal{A}^\alpha), d^\alpha)$ et $(K(\mathcal{A}), d)$. Cela induira un isomorphisme de complexes entre leur contraction. Un isomorphisme de complexes étant un homomorphisme, l'acyclicité de \mathcal{C}^α sera équivalente à celle de \mathcal{C} , ce qui prouvera le théorème.

Rappelons que $\mathcal{A}_i^{!*}$ est naturellement un sous-espace de $E^{\otimes i}$ (cf. [3]). Définissons $K(\theta) : K(\mathcal{A}^\alpha) \rightarrow K(\mathcal{A})$ en degré i par :

$$K(\theta)_i : K(\mathcal{A}^\alpha)_i = \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_i^{!*} \rightarrow K(\mathcal{A})_i = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*}$$

$$a \otimes e \mapsto a \otimes \alpha^{|a|} \circ \theta_i(e) \quad (2)$$

Il est clair que $K(\theta)_i$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Vérifions alors que $K(\theta)$ est un morphisme de N -complexes.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i+1}^{!*} & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_i^{!*} & \xrightarrow{d^\alpha} & \mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d^\alpha} \dots \\ & & \downarrow K(\theta)_{i+1} & & \downarrow K(\theta)_i & & \downarrow K(\theta)_{i-1} \\ \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i+1}^{!*} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_i^{!*} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{i-1}^{!*} \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

Soit $a \otimes (e \otimes f)$ un élément générique de $\mathcal{A}^\alpha \otimes (\mathcal{A}^\alpha)_{i+1}^{!*}$ avec $\mathcal{A}_{i+1}^{!*} \subset E^{\otimes i+1} \simeq E \otimes E^{\otimes i}$. D'une part $d^\alpha(a \otimes (e \otimes f)) = a \cdot e \otimes f = a\alpha^{|a|}(e) \otimes f$, donc $K(\theta)_i \circ d^\alpha(a \otimes (e \otimes f)) =$

$a\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f))$ car $|a\alpha^{|a|}(e)| = |a| + 1$ puisque α est de degré 0. D'autre part $K(\theta)_{i+1}(a \otimes (e \otimes f)) = a \otimes \alpha^{|a|} \circ \theta_{i+1}(e \otimes f) = a \otimes \alpha^{|a|}(e \otimes \alpha \circ \theta_i(f)) = a \otimes (\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f)))$ en utilisant (1), donc $d \circ K(\theta)_{i+1}(a \otimes (e \otimes f)) = a\alpha^{|a|}(e) \otimes \alpha^{|a|+1}(\theta_i(f))$. Finalement $K(\theta)_i \circ d^\alpha = d \circ K(\theta)_{i+1}$, et $K(\theta)$ est un isomorphisme de N -complexes d'espaces vectoriels. CQFD.

Proposition 3 *Si \mathcal{A} est de type Koszul de dimension globale finie alors \mathcal{A}^α l'est aussi.*

En effet, dans le cas où \mathcal{A} est de type Koszul la dimension globale D est donnée par le plus grand entier tel que $\mathcal{C}_D \neq 0$ (avec $\mathcal{C} = \mathcal{A}$). Via l'isomorphisme $K(\theta)$, $\mathcal{C}_D \neq 0$ équivaut à $\mathcal{C}_D^\alpha \neq 0$, d'où la proposition.

Exemple Montrons que $\mathcal{A}^\alpha = A(E, R = x \otimes x \otimes x - y \otimes y \otimes y)$ est de type Koszul de dimension globale 2, ce qui montrera en vertu des théorèmes précédents que l'algèbre des tresses à 3 brins est du même type.

Le 3-complexe $K(\mathcal{A}^\alpha)$ se calcule simplement :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d_3} (\mathcal{A}^\alpha)^4 \xrightarrow{d_2} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

avec $d_3 : a \mapsto (ax, 0, 0, -ay)$, $d_2 : (a, b, c, d) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$ et $d_1 : (a, b) \mapsto ax + by$. Le complexe de Koszul C^α obtenu en contractant s'écrit, dans ce cas :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{\delta} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

où $\delta^\alpha = d_2 \circ d_3 : a \mapsto a(x^2, -y^2)$ et $d = d_1$. La suite est exacte au niveau de $(\mathcal{A}^\alpha)^2$, c'est la définition de l'algèbre par générateurs et relations [3]. Il suffit donc de vérifier l'injectivité de la première flèche.

Lemme : x et y sont réguliers à droite (sans diviseur de zéro à gauche).

Raisonnons par récurrence sur le degré des éléments de l'algèbre, l'initialisation étant évidente. Supposons x et y réguliers jusqu'au degré n . Soit $a \in \mathcal{A}_{n+1}^\alpha$ tel que $ax = 0$, alors $d(a, 0) = 0$. De par l'exactitude au niveau de $(\mathcal{A}^\alpha)^2$, il existe $a' \in \mathcal{A}_{n-1}^\alpha$ tel que $\delta(a') = (a, 0)$. Donc $a'y^2 = 0$ et par hypothèse de récurrence $a' = 0$ d'où $a = a'x^2 = 0$. x est bien régulier à droite jusqu'au degré $n + 1$, la démonstration pour y est identique. Le lemme est prouvé.

Puisque x et y sont réguliers à droite, la première flèche du complexe de Koszul C^α est donc injective. Donc l'algèbre des tresses à 3 brins possède la propriété de Koszul et est de dimension globale 2.

Remarque : La propriété de Koszul permet de calculer la série de Poincaré $P_{\mathcal{A}}(t) = \sum \dim(\mathcal{A}_n)t^n$ de \mathcal{A} . En effet d'après [8], on a la relation suivante :

$$P_{\mathcal{A}}(t) \left(\sum_n \dim(\mathcal{A}_{Nn}^\dagger)t^{Nn} - \dim(\mathcal{A}_{Nn+1}^\dagger)t^{Nn+1} \right) = 1 \quad (3)$$

Dans notre cas $N = 3$, cela donne $1/P_{\mathcal{A}}(t) = 1 - 2t + t^3 = (1 - t)(1 - t - t^2)$. Ainsi l'algèbre des tresses à 3 brins est à croissance exponentielle.

Théorème 4 *Si \mathcal{A} est de type Koszul de dimension globale finie D , alors \mathcal{A} est de type Gorenstein si et seulement si \mathcal{A}^α l'est.*

Dans les hypothèses du théorème, \mathcal{A} est de type Gorenstein si la cohomologie du complexe dual \mathcal{C}' est nulle en degré strictement inférieur à D . Le complexe de cochaînes \mathcal{C}' de \mathcal{A} -modules à droite est obtenu à partir du complexe de chaînes \mathcal{C} de \mathcal{A} -modules à gauche en appliquant le foncteur contravariant $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, \mathcal{A})$. Le complexe de cochaînes \mathcal{C}'

est la contraction $C_{1,0}$ du N -complexe $L(\mathcal{A})$ obtenu en appliquant le foncteur contravariant $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, \mathcal{A})$ à $K(\mathcal{A})$ comme expliqué dans [6]. Or il est immédiat que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(K(\theta), \mathcal{A})$ est toujours un isomorphisme de N -complexes d'espaces vectoriels entre $L(\mathcal{A}^\alpha)$ et $L(\mathcal{A})$. Il induit donc un isomorphisme de complexes entre $(\mathcal{C}^\alpha)'$ et \mathcal{C}' , d'où un homologie, ce qui prouve le théorème.

(Contre)-exemple Dans le cas de l'algèbre des tresses à 3 brins, le 3-complexe $L(\mathcal{A}^\alpha)$ s'obtient facilement à partir de $K(\mathcal{A}^\alpha)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d^1} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{d^2} (\mathcal{A}^\alpha)^4 \xrightarrow{d^3} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

avec $d^1 : a \mapsto (xa, ya)$, $d^2 : (a, b) \mapsto (xa, xb, ya, yb)$ et $d^3 : (a, b, c, d) \mapsto xa - yd$. Le complexe de Gorenstein $(\mathcal{C}^\alpha)'$ obtenu en contractant s'écrit donc, dans ce cas :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\alpha \xrightarrow{d'} (\mathcal{A}^\alpha)^2 \xrightarrow{\delta'} \mathcal{A}^\alpha \longrightarrow 0$$

où $d' = d^1$ et $\delta' = d^3 \circ d^2 : a \mapsto (x^2, -y^2)a$. Il est alors clair que $H^2((\mathcal{C}^\alpha)') \neq k$, donc l'algèbre n'est pas de type Gorenstein. En résumé, l'algèbre des tresses à 3-brins est Koszul de dimension 2, mais n'est pas Gorenstein.

Références

- [1] A. Connes et M. Dubois-Violette. Non commutative finite dimensional manifolds II. Moduli space and structure of non commutative 3-spheres. arXiv : math.QA/0511337.
- [2] S. B. Priddy. Koszul resolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152** :39–60, (1970).
- [3] R. Berger, M. Dubois-Violette et M. Wambst. Homogeneous algebras. *J. Algebra*, **261** :172–185, (2003). arXiv : math.QA/0203035.
- [4] R. Berger. Koszulity for non quadratic algebras. *J. Algebra*, **239** :705–734, (2001).
- [5] M. Artin et W.F. Shelter. Graded algebras of global dimension 3. *Adv. Math.*, **66** :171–216, (1987).
- [6] A. Connes et M. Dubois-Violette. Yang-Mills algebra. *Letters in Mathematical Physics*, **61** :149–158, (2002). arXiv : math.QA/0206205.
- [7] A. Connes et M. Dubois-Violette. Yang-Mills and some related algebras. arXiv : math-ph/0411062.
- [8] M. Dubois-Violette et T. Popov. Homogeneous algebras, statistics and combinatorics. *Letters in Mathematical Physics*, **61** :159–170, (2002). arXiv : math.QA/0207085.